На правах рукописи

Иваньшин Петр Николаевич

АЛГЕБРЫ ФУНКЦИЙ НА ГРУППОИДЕ СЛОЕНИЯ, ПОРОЖДЕННОГО ДЕЙСТВИЕМ КОММУТАТИВНОЙ ГРУППЫ ЛИ

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань - 2005

Работа выполнена в Научно-исследовательском институте математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета (НИИММ КГУ)

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент,
Малахальцев Михаил Арменович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор,
Григорян Сурен Аршакович,

кандидат физико-математических наук, доцент,
Жукова Нина Ивановна.

Ведущая организация **Московский государственный университет**

Защита состоится 1 декабря 2005г. в 15.30 на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете им. В.И. Ульянова-Ленина по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д.18.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина

Автореферат разослан 30 октября 2005 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
канд. физ.-мат. наук,
доцент

М. А. Малахальцев

Общая характеристика работы

Актуальность. Слоение, порожденное действием коммутативной группы, является естественным обобщением динамической системы. Основы качественной теории динамических систем заложены в работах А. Пуанкаре, ряд фундаментальных результатов в этой области был получен выдающимися советскими математиками А.Н. Колмогоровым, В.И. Арнольдом [1], Д.В. Аносовом [8]. Выдающиеся результаты в теории слоений были получены С.П. Новиковым.

Одним из мощных инстументов исследования динамических систем является применение методов функционального анализа. А. Конн развил новый подход к построению инвариантов слоения на основе изучения C^*-алгебр функций на группоидах [12] слоений с использованием топологической K-теории [2]. Исследованию топологических свойств многообразий со слоениями посвящена монография К.К. Мура и К. Шоке [15]. Ж. Рено, Ф. Каде [10] применяли эти методы, например, для решения задачи квантования скобки Пуассона на многообразии.

Слоения со связностями Эресмана были введены в работах Р.А. Блюменталя и Дж. Дж. Хебды [9]. Они подробно исследовались в работах Я.Л. Шапиро, Н.И. Жуковой [6, 7, 5], Р. Волака [16]. Отметим, что понятие связности Эресмана является обобщением структуры двуслоения, введенной Я.Л. Шапиро. Существуют достаточно эффективные критерии существования связности Эресмана для слоений. Все они накладывают дополнительные требования на многообразие со слоением. Например, существование симплектической структуры и метрики с определенными свойствами, существование исчезающих циклов, отсутствие компонент Риба (в особенности на многообразиях размерности 3), отсутствие предельных циклов, наличие римановой метрики на многообразии и условия ограниченности длин стороны прямоугольников, построенных с помощью этой метрики. Также вопрос о существовании связности Эресмана исследовался для тотально геодезических слоений [11, 13].

Цель работы. Изучение многообразий со слоениями, порожденными действием коммутативной группы Ли, в частности, нахождение условий существования связности Эресмана, инвариантной относительно действия этой группы, построение инвариантов такого слоения с помощью алгебры непрерывных функций на группоиде слоения.

Методика исследования. В работе использовались методы теории слоений, дифференциальной топологии, функционального анализа.

Научная новизна. Результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором самостоятельно.

На защиту выносятся следующие результаты.

1. Для многообразия со слоением коразмерности 1, порожденным локально свободным действием группы $\mathbb{R}^n$, в терминах действия этой группы найдены необходимые и достаточные условия существования связности Эресмана.

2. Построена почти всюду непрерывная биекция многообразия M со слоением F, порожденным действием коммутативной группы Ли H, и связностью Эресмана, инвариантной относительно действия этой группы, на произведение H-дополнительной трансверсали P и фактора H по инвариантной подгруппе $H_P = \{h \in H | hp \in P\}$.

3. Для алгебры скрещенного произведения $C_r^*(G)$ на группоиде слоения построена фильтрация, сходящаяся к $C_r^*(G)$; доказана стабилизация группы K_0 алгебр из фильтрации.

4. Построено вложение алгебры функций $C_0(M)|_L$, полученных ограничением непрерывных функций, обращающихся в 0 на бесконечности, на слой слоения, в $C_0(L) \times \prod\limits_{\mathbb{Z}} C([0,1])$. Выяснено, как свойства этого вложения зависят от структуры множества точек пересечения слоя и трансверсали.

Теоретическое значение.

Результаты диссертации могут быть применены для исследования многообразий со слоениями, в частности, к получению условий существования связности Эресмана на слоеном многообразии, к исследованию алгебр, ассоциированных со слоением.

Апробация работы.

Результаты докладывались на конференциях:

1. Международная конференция "Алгебра и Анализ - 2004", Казань, КГУ, 2–9 июля 2004 г.

2. Международная конференция "Колмогоров и современная математика", Москва, МГУ, 2003 г.

3. Международная конференция "New Geometry of Nature", Казань, КГУ, 25 августа – 5 сентября 2003 г.

Также по результатам диссертации были сделаны доклады на международных молодежных научных школах-конференциях "Лобачевские чтения"(2003, 2004 гг.), на итоговых конференциях Казанского государственного университета (2001 – 2004 гг.), на заседаниях семинаров кафедры геометрии Казанского государственного университета и отдела геометрии Научно-исследовательского института математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Работа набрана в системе LaTeX и содержит 114 страниц. Список литературы насчитывает 54 названия.

Содержание работы.

В первой главе излагаются основные сведения из теории слоений и теории C^*-алгебр, используемые в диссертации.

В первой части второй главы изучаются условия существования на заданном многообразии со слоением коразмерности 1, порожденным действием коммутативной группы Ли, связности Эресмана, инвариантной относительно действия этой группы.

Определение 38. *Назовем трансверсаль P* **H-дополнительной к слоению** *F, если $\{hP\}_{h \in H}$ — слоение на M, дополнительное к F.*

Определение 39. *Будем говорить, что трансверсаль* **гомотопна H-дополнительной***, если на H можно так задать новую групповую структуру, непрерывную относительно старой, что в новой групповой структуре на H трансверсаль P станет H-дополнительной.*

Пусть слоение F допускает H-дополнительную трансверсаль P. Определим одномерное распределение E на M следующим образом. Так как трансверсаль P пересекает все слои слоения F (орбиты действия H), для любой $x \in M$ существуют $p \in P$ и $h \in H$ такие, что $x = hp$. Положим

$$E(x) = dh_p(T_pP).$$

Теорема 15. *Распределение E есть связность Эресмана на M.*

Рассмотрим теперь множество $B = \{(h, x) \in H \times P | hx \in P\}$.

Теорема 16. *Пусть (M, F) — двумерное многообразие со слоением, порожденным локально свободным действием коммутативной группы Ли $H \cong \mathbb{R}$. Пусть существует тотальная связная замкнутая трансверсаль P, для которой $\pi_0 : B \to P$ — глобально тривиальное накрытие.*

Тогда P гомотопна H-дополнительной к слоению F.

Пусть $\dim H > 1$ и расслоение B глобально тривиально. Определим перенос элемента $h \in H_x$ по $g \in H_x$ следующим образом: Пусть $(gx, h') \in \{gx\} \times H_{gx}$ — элемент слоя расслоения B, лежащий в одной компоненте связности с $(x, h) \in \{x\} \times H_x \subset B$. Положим $\Pi_g h = gh' \in H_x$.

Теорема 17. *Если B глобально тривиальное накрытие и для всех $x \in P$ и $h \in H_x$ перенос Π_g — ограничение сдвига в $\mathbb{R}^n$, то P гомотопна H-дополнительной.*

Далее рассмотрим частный случай, в котором глобальная трансверсаль слоения гомеоморфна $\mathbb{S}^1$.

Теорема 18. *Если трансверсаль P компактна, то $\pi_0 : B \to P$ — накрытие.*

Центральным утверждением этого параграфа является

Следствие 1. *Пусть на двумерном многообразии слоение F порождено локально свободным действием $\mathbb{R}$. Пусть P — тотальная связная компактная трансверсаль к F. Тогда P гомотопна H-дополнительной.*

Приведены примеры, иллюстрирующие утверждения, приведенные выше, в частности, показано, что для некомпактной трансверсали утверждения теоремы 18 и следствия 1 могут быть неверны.

Теорема 20. *Пусть слоение коразмерности 1 на многообразии M порождено действием коммутативной группы Ли. Пусть еще множество H-дополнительных к слоению F трансверсалей не пусто. Тогда на множестве инвариантных связностей Эресмана можно ввести структуру аффинного пространства.*

Во второй части второй главы строится биекция $M \to P \times S$. Для построения этого отображения доказаны следующие утверждения:

Теорема 21. *Предположим, что существует такая точка $x_0 \in M$, что*

1) *$P(x_0)$ — связное подмногообразие M размерности, равной коразмерности слоения.*

2) *Слой S, проходящий через точку x_0, пересекает $P(x_0)$ только в x_0.*

Пусть S' есть связное подмножество в H такое, что существует универсальное накрытие $p : H \to S$, со свойствами: $p(e) = x_0$, $p|_{S'} : S' \to S$ есть биекция и $p|_{S'^\circ} : S'^\circ \to S^\circ$ есть гомеоморфизм, здесь A° — внутренность множества A. Тогда существует почти всюду непрерывная биекция $\phi : M \to P(x_0) \times S'$.

Следствие 4. *Пусть M — многообразие со слоением, порожденным действием коммутативной группы H. Пусть существует P — множество точек, которые могут быть соединены с выделенной точкой $x_0 \in L_0 \subset M$ горизонтальной кривой, такое, что*

1) *P — подмногообразие.*

2) $\dim P = n - p$ *— коразмерности слоения.*

Тогда существует сюрьекция $\pi : P \times L_0 \to M$, которая почти всюду является локальным гомеоморфизмом, причем для каждого $x \in M$ π непрерывно на $L_0/S \times \{x\}$, $S = H/H_P$, где H_P — группа изотропии трансверсали P.

В третьей главе исследуются алгебры функций на группоиде слоения.

Построим неубывающую последовательность подалгебр алгебры скрещенного произведения $C^*_r(G)$. Покроем P открытыми шарами радиуса ε, то есть $P = \bigcup\limits_{x \in P} U_\varepsilon(x)$. Определим алгебры $C^*_{r,\varepsilon}(U_\varepsilon(x))$ в каждом шаре $U_\varepsilon(x)$. Отношение эквивалентности для каждого шара $U_\varepsilon(x)$ определим как отношение эквивалентности на многообразии $\mathrm{Sat}(U_\varepsilon(x))$ с горизонтальными кривыми, лежащими в $U_\varepsilon(x)$.

Предложение 17.*Пусть M — многообразие со слоением, порожденным действием компактной коммутативной группы Ли H и интегрируемой связностью Эресмана. Пусть P есть горизонтальное инвариантное трансверсальное подмногообразие (M, F) максимальной размерности.*

Предположим, что

1) *Для каждой пары точек $x, y \in P$ $d(hx, hy) = \mathrm{const}$ (действие H_P сохраняет расстояние между точками на P).*

2) *Существует лишь конечное количество особых точек на P.*

3) *Каждый слой слоения F пересекает P в дискретном множестве точек.*

Тогда $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} C^*_{\varepsilon,r} = C^*_r(G)$.

Исследованы на сходимость локальные алгебры группоида слоения:

Предложение 18. 1) *Для любых двух слоев L_1 и L_2 слой L_1*

имеет насыщенную окрестность, которая не пересекает L_2.

2) *Пусть* a) H *некомпактна,* b) $\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} C^*_{\varepsilon,r} = C^*_r(G)$, c) *для каждого* $L \in F$ *и* $x \in L\bigcap P$ *существует* $U(x) \subset P$, $U(x)\bigcap L = \{x\}$. *Тогда для любых двух слоев* L_1 *и* L_2 *слой* L_1 *имеет насыщенную окрестность, которая не пересекает* L_2.

Теорема 24. *Пусть слоение* F *допускает* H*-дополнительную трансверсаль* P *такую, что множество особых точек* Σ *конечно. Пусть* $\lim_{\varepsilon\to 0} C^*_{\varepsilon,r} = C^*_r$. *Тогда существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что для любого* $\delta < \varepsilon_0$

$$\tilde{K}_0(C^*_r(G)) \cong \tilde{K}_0(C^*_{\delta,r}).$$

В первой части последней главы изучается структура алгебры $C_0(M)|_L$. Вначале рассмотрены три простейших случая, для каждого из которых найдена структура исследуемой алгебры. На примере этих частных случаев показана связь исследуемой задачи с метрической классификацией гомеоморфизмов $P \to P$.

Теорема 26. *Пусть для точки* $x \in P$ *последовательность* $a^n x$ *содержит сходящуюся подпоследовательность* $a^{n_i}x \to z \in P$, $n_i \to \infty$. *Пусть* L *— слой слоения* F, *проходящий через точку* x. *Тогда существует инъективное отображение*

$$C_0(M)|_L \to C_0(L) \times \prod_{\mathbb{Z}} C([0,1]).$$

Далее доказано, что в представлении, полученном выше, $C_0(L)$ не присутствует тогда и только тогда, когда $L\bigcap P$ не содержит изолированные точки. Вторая часть $\times_{\mathbb{Z}} C([0,1])$ конечна тогда и только тогда, когда конечно множество предельных точек.

Приведены примеры всех возможных типов представления, как содержащих только один сомножитель из представления, так и произвольную их комбинацию.

Далее исследована структура спектра семейства операторов типа Шредингера $\mathcal{H}_L = -\frac{d^2}{dx^2} + V$, $V \in C_0(M)|_L$ на многообразии со слоением. Пусть сначала $H = \mathbb{T}^n$ и операторы действуют на универсальной накрывающей слоя.

Теорема 27. *Пусть слои слоения F компактны. Тогда спектр Λ_x оператора Шредингера $\mathcal{H}_x$ непрерывно зависит от $x \in P$, то есть для любой точки $s \in \Lambda_x$ и любой окрестности $U(s) \subset \mathbb{R}$ существует такая окрестность $V(x) \subset P$, что для каждой $x' \in V(x)$ множество $\Lambda_{x'} \cap U(s)$ непусто.*

Пусть операторы действуют на слоях.

Теорема 28. *Пусть все слои слоения F компактны. Тогда спектр оператора Шредингера $\mathcal{H}_L$, непрерывно (см. теорему 27) зависит от параметра $p \in P$.*

Теорема 29. *Спектр оператора Шредингера*

$$\mathcal{H}_L = -\frac{d^2}{dx^2} + V$$

на L, где V есть почти-периодическая функция, не зависит от слоя $L \in F$.

Список публикаций автора по теме диссертации:

Статьи:

1. Ivanshin P.N. Algebras of functions on groupoid of some special foliations. / P.N. Ivanshin // Southwest J. Pure Appl. Math. – 2003. – Vol. 1. – Pp. 96-108.

2. Ivanshin P. N. Deformational quantization on manifolds with the action of $\mathbb{R}^n$ and integrable Ehresmann connection. / P.N. Ivanshin // Proc. Joint Intern. Conf. "New Geometry of Nature", Kazan State University, Kazan, Russia, August 25-September 5. – 2003. – Vol. 1. – Pp. 98-100.

3. Иваньшин П.Н. Структура алгебры ограниченных бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на группоиде многообразия со слоением, порожденным действием коммутативной группы. / П.Н. Иваньшин // Изв. вуз-ов, Математика. – 2004. – N. 5. – С. 37-40.

4. Ivanshin P.N. Structure of function algebras on foliated manifolds. / P.N. Ivanshin // Lobachevskii J. Math. – 2004. – Vol. 14. – Pp. 39-54.

5. Иваньшин П.Н. Операторы на слоях слоения, порожденного действием $\mathbb{R}$. / П.Н. Иваньшин // Уч. записки КГУ. 2005. т. 147, кн. 1. С. 55-64.

Тезисы конференций:

1. Иваньшин П.Н. Структура алгебры $C^*_r(G)$ на многообразии со слоением, порожденным действием коммутативной группы и связностью Эресмана/ П.Н. Иваньшин // Волга-2002, Тезисы докладов. – Казань, Изд-во "Регент", 2002.– С. 24.

2. Иваньшин П.Н. Алгебры функций на группоиде слоения, порожденного действием коммутативной группы / П.Н. Иваньшин // Движения в обобщенных пространствах, Межвуз. сб. науч. трудов. – Пенза, изд-во ПГПУ, 2002.– С. 100-108.

3. Иваньшин П.Н. Алгебры функций на группоиде слоения, порожденного локально свободным действием коммутативной группы Ли./ П.Н. Иваньшин // Труды геометрического семинара: Межвуз. темат. сб. науч. тр., Вып. 24. – Казань, 2003.– С. 63-68.

4. Ivanshin P.N. On certain operator algebras on the groupoid of

the foliation. / П.Н. Иваньшин // Тезисы докладов международной конференции "Колмогоров и современная математика". – Москва, МГУ, 2003.– С. 811.

5. Иваньшин П.Н. Плотность слоев на многообразии со слоением, порожденным действием $\mathbb{R}^n$ / П.Н. Иваньшин // Волга-2004, Тезисы докладов. – Казань, Изд-во "Веда", 2004.– С. 51.

6. Иваньшин П.Н. Спектр одного семейства операторов на многообразии со слоением / П.Н. Иваньшин // Алгебра и Анализ - 2004, Материалы международн. конференции. – Казань, Изд-во Казанского математического общества, 2004.– С. 95-96.

Список литературы

[1] Арнольд В.И. Эргодические проблемы классической механики / В.И. Арнольд, А. Авец – Ижевск: РХД, 2000. – 284 с.

[2] Мерфи Дж. C^*-алгебры и теория операторов / Дж. Мерфи – М.: Факториал, 1997. – 336 с.

[3] Новиков С.П. Топология слоений. / С.П. Новиков // Труды моск. мат. общ-ва. – 1965. – Т. 14. – С. 248-278.

[4] Тамура И. Топология слоений / И. Тамура – М.: МИР, 1979. – 320 с.

[5] Шапиро Я.Л. О двулистной структуре на приводимом римановом многообразии. / Я.Л. Шапиро // Известия вузов. Матем. – 1972. – N 12. – С. 102-110.

[6] Шапиро Я.Л., Жукова Н.И. О глобальной структуре приводимых многообразий. / Я.Л. Шапиро, Н.И. Жукова // Известия вузов. Матем. – 1980. – N 10. – С. 60-62.

[7] Шапиро Я.Л. Слоения на некоторых классах римановых многообразий. / Я.Л. Шапиро, Н.И. Жукова, В.А. Игошин // Известия вузов. Матем. – 1979. – N 7. – С. 93-96.

[8] Anosov D.V. Flows on closed surfaces and behavior of trajectories lifted to the universal covering plane // J. Dyn. Control Syst., 1, N 1, 1995. p. 125-138.

[9] Blumenthal R.A. Complementary distributions which preserve the leaf geometry and applications to totally geodesic foliations / R.A. Blumenthal, J.J. Hebda // Quart. J. Math. – 1984. – N 35. – Pp. 383-392.

[10] Cadet F. Deformation quantization using groupoids. Case of toric manifolds // arXiv:math.OA/0305261.

[11] Cairns G. Feulletages géodésibles. Thése / G. Cairns – USTL Montpellier, 1987.

[12] Connes A. Noncommutative geometry / A. Connes – San Diego, CA: Academic Press, 1994. – 661 p.

[13] Hermann R. A sufficient condition that a map of Riemannian manifolds be a fibre bundle // Proc. A.M.S. – 1960. – Vol. 11. – Pp. 236-242.

[14] Molino P. Riemannian foliations / P. Molino Boston: Birkhauser, 1988. – 339 p.

[15] Moore C.C. Global analysis on foliated spaces / C.C. Moore, C. Schochet – Berlin: Springer-Verlag, 1988. – 337 p.

[16] Wolak R.A. Ehresmann connections for lagrangian foliations. / R.A. Wolak // Journal of Gometry and Physics – 1995. – Vol. 17. – Pp. 310-320.